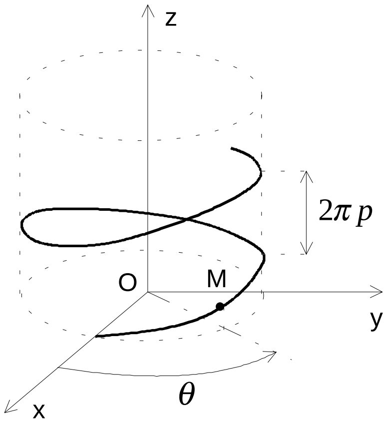
-EXERCICE 9.2-

• ENONCE :

« Mouvement hélicoïdal »



Un point matériel M se déplace sur une hélice **circulaire**, enroulée sur un cylindre de rayon R. En coordonnées cylindriques, les équations du mouvement s'écrivent:

$$r = cste = R \;;\; \theta(t) \;;\; z(t) = p\theta(t)$$

Rq : p est le "pas réduit" de l'hélice; la grandeur $2\pi p$ est le "pas" de l'hélice et représente la variation de z(t) lorsque le point M a effectué un tour.

1) Déterminer le vecteur vitesse du point matériel M ; donner son module.
2) Déterminer le vecteur accélération de M.
3) On s'intéresse à un mouvement **uniforme**, où $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, avec $\omega = cste$; simplifier les expressions précédentes, et en déduire le rayon de courbure ρ de l'hélice.

• CORRIGE :

« Mouvement hélicoïdal »

1) On sait que dans la base mobile cylindrique, le vecteur vitesse s'exprime par :

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \Rightarrow$ puisque $r = R = cste$: $\boxed{\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + p\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z}$

• On en déduit que : $\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\left(R\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(p\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \left|\frac{d\theta}{dt}\right| \times \sqrt{R^2 + p^2}}$

2) De même, on sait que l'accélération s'écrit :

$$\boxed{\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\times\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + p\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_z}$$

3) Dans le cas d'un mouvement uniforme, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \Rightarrow \vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r$: l'accélération est purement radiale.

Par ailleurs, si on projetait le vecteur accélération sur la base de Frenet, on trouverait que l'accélération est purement normale (le mouvement étant uniforme, on a $\frac{dv}{dt} = 0$) ; on a alors :

$$a_N = -a_r = +R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{R^2 + p^2}{R} = R + \frac{p^2}{R} \succ R}$$